ИОИП 2014:
Разбор задач

16 марта 2014 года

Задача «Алекс и стейк»

Над задачей работали

- Идея задачи: Андрей Станкевич
- Текст условия: Павел Кротков
- Тесты, проверяющая программа и др.: Николай Ведерников
- Текст разбора: Николай Ведерников

Постановка задачи

- Дано число количество нажатий на кнопку n
- Первое нажатие увеличивает таймер на 30 секунд
- После каждых пяти нажатий время, на которое увеличивается таймер, увеличивается на 30 секунд
- Посчитать итоговое время после n нажатий на клавишу

Частичные решения

- Промоделировать то, что написано в условии
- Сложность $O(n)$, решение набирает 50 баллов

Правильное решение

- Заметим, что время, на которое увеличивает таймер, образует арифметическую прогрессию
- Членов в этой прогрессии будет $\lfloor \frac{n}{5} \rfloor$
- Не забыть учесть остаток
- Ответом тогда будет $(\lfloor \frac{n}{5} \rfloor \cdot (\lfloor \frac{n}{5} \rfloor + 1)/2 + (n\%5) \cdot (\lfloor \frac{n}{5} \rfloor + 1)) \cdot 30$
- Не забыть считать в 64-битном типе данных

Вопросы

- Вопросы?

Задача «Ягоды для лемуров»

Над задачей работали

- Идея задачи: Павел Кротков
- Текст условия: Павел Кротков
- Тесты, проверяющая программа и др.: Анна Малова
- Текст разбора: Анна Малова

Постановка задачи

- Дан массив a_i.
- Для каждого i введем величину s_i — количество таких j, что $j < i < j + a_j$
- Посчитать $\sum_{i=1}^{n} a_i s_i$

Частичные решения

- Для каждой позиции i переберем все $j < i$
- Посчитаем количество j, удовлетворяющих условию $j + a_j > i$
- Посчитаем ответ
- Сложность $O(n^2)$, решение набирает 40 баллов

Правильное решение

- Будем поддерживать массив b_i, такой что $\sum_{k=1}^{i} b_i = s_i$. Как поддерживать?
- Позиция j влияет на ответ для всех i в интервале от j до $a_j + j$.
- Прибавим 1 в начале интервала и -1 в конце в массиве b.
- Пройдемся по массиву b, считая ответ.
- Сложность $O(n)$, решение набирает полный балл.

Вопросы

- Вопросы?

Задача «Мощный взрыв»

Над задачей работали

- Идея задачи: Николай Ведерников
- Текст условия: Павел Кротков
- Тесты, проверяющая программа и др.: Павел Кротков
- Текст разбора: Павел Кротков

Постановка задачи

- Рассматриваем дроби вида $\frac{x}{c^y}$
- Наложим следующие ограничения: $1 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$
- Посчитаем количество различных дробей в получившемся множестве

Частичные решения

- Посчитаем значения всех этих дробей
- Можно хранить их как сокращенные дроби (пара чисел 64-битного целочисленного типа данных)
- Можно хранить как десятичные приближения (число 64-битного вещественного типа данных)
- Посчитаем различные с помощью сортировки или `set`
- В зависимости от реализации 30 или 60 баллов

Правильное решение

- Дроби вида $\frac{x}{c^0}$ посчитаем отдельно (их ровно a)
- Заметим, что все дроби вида $\frac{z \cdot c}{c^y}$ где $y \geq 1$ уже учтены нами как $\frac{z}{c^{y-1}}$
- Есть ли одинаковые дроби среди всех остальных?

Правильное решение

- По результату сокращения любой дроби, которую мы еще не выкинули из ответа, можно однозначно восстановить ее исходный вид
- Это можно сделать, домножив числитель и знаменатель на константу так, чтобы в знаменателе была минимальная возможная степень числа c
- Значит, среди оставшихся дробей нет одинаковых

Правильное решение

- Считаем ответ по формуле $a + b \cdot (a - \lfloor \frac{a}{c} \rfloor)$

Вопросы

- Вопросы?

Задача «А когда праздники?»

Над задачей работали

- Идея задачи: Демид Кучеренко
- Текст условия: Демид Кучеренко
- Тесты, проверяющая программа и др.: Демид Кучеренко
- Текст разбора: Демид Кучеренко

Формулировка задачи

- Даны день недели, на который пришлось 1 января, и информация о том, високосный ли год.
- Требовалось определять по празднику типа «первая пятница июля» его дату в этом году.
- Задача была на технику программирования и не требовала сложных идей

Идея решения

- Будем для каждой даты находить решение заново, то есть постоянно возвращать текущее состояние на 1 января
- Таким образом избежим такого действия, как уменьшить дату. Будем увеличивать дату пока не найдем ответ.
- Если запрос на нахождение первого дня недели месяца, то очевидно, что его дата лежит в диапазоне $[1;7]$.
- Если запрос на нахождение последнего дня недели месяца, то он его дата лежит в диапазоне $[n-6;n]$, где n — количество дней месяца.

Идея решения

- Заведем массив, в котором для каждого месяца будем хранить количество дней в нем.
- Будем увеличивать текущую дату, пока не попадем в нужный промежуток. Правильная дата в этом промежутке ровно одна (не забываем увеличивать день недели, чтобы понять, какая именно дата из диапазона нам нужна).
- В массиве с количеством дней будем изменять количество дней в феврале в случае високосного года.

Вопросы

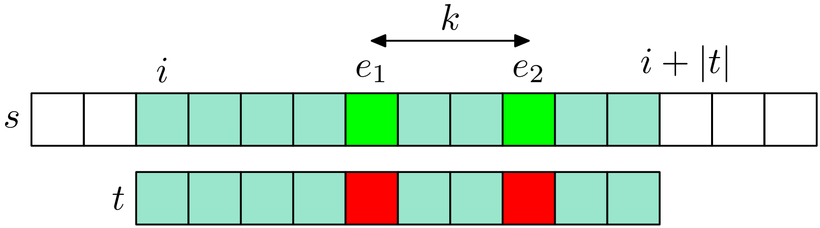
- Вопросы?

Задача «Мелман»

Над задачей работали

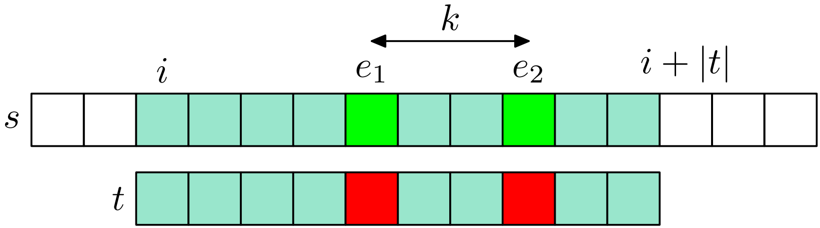
- Идея задачи: Николай Ведерников, Павел Кротков
- Текст условия: Андрей Комаров
- Тесты, проверяющая программа и др.: Андрей Комаров
- Текст разбора: Андрей Комаров

Формулировка задачи



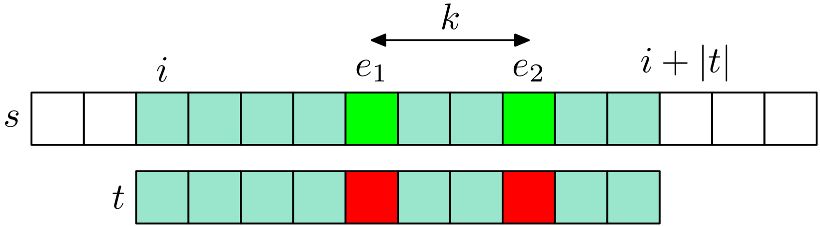
- Заданы строки s, t и число k
- Найти в строке s все позиции i, прикладывание к которым строки t даст ровно два несовпадения, и они будут отстоять друг от друга ровно на k

Идея решения



- Переберём все места прикладывания t
- Для каждого из них найдём наидлиннейший общий префикс с t
  - Он имеет длину $e_1 - i$
- Проверим, что символы $s[e_1 + 1 \ldots e_2 - 1]$ равны соответствующим символам в t
- Проверим, что символы $s[e_2 + 1 \ldots i + |t| - 1]$ равны соответствующим символам в t
- Проверим, что символы, соответствующие e_1 и e_2, не совпадают

Решение на 60 баллов



- Реализуем алгоритм с прошлого слайда
- Мест прикладывания — $\mathcal{O}(|s|)$
  - Найти длиннейший общий префикс — $\mathcal{O}(|s|)$
  - Проверить $s[e_1 + 1 \dots e_2 - 1]$ — $\mathcal{O}(|s|)$
  - Проверить $s[e_2 + 1 \dots i + |t| - 1]$ — $\mathcal{O}(|s|)$
- Итого — $\mathcal{O}(|s|^2)$, 60 баллов

Как улучшить?

- Нужно научиться быстрее
  - искать наибольший общий префикс подстрок двух строк
  - проверять на равенство подстроки двух строк

Как улучшить?

- Нужно научиться быстрее
  - искать наибольший общий префикс подстрок двух строк
  - проверять на равенство подстроки двух строк
- Начнём со второго

Хеширование

- Выберем числа X и M
- Для строки s посчитаем $h(s) = \sum_{i=0}^{|s|-1} X^{|s|-i-1} s_i \mod M$
- $h_i(s) = h(s[0 \dots i-1])$, то есть, от префикса длины i
- Несложно убедиться, что $h(s[i \dots j]) \equiv h_{j+1}(s) - h_i(s) \cdot X^{j-i+1} \mod M$
- Посчитав заранее значения $h_i(s)$ и $X^i \mod M$, можно за $\mathcal{O}(1)$ искать $h(s[i \dots j])$

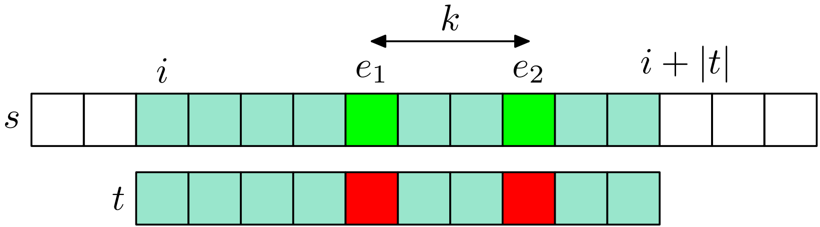
Хеширование

- Предполагаем, что $h(s_1) = h(s_2) \to s_1 = s_2$.

Хеширование

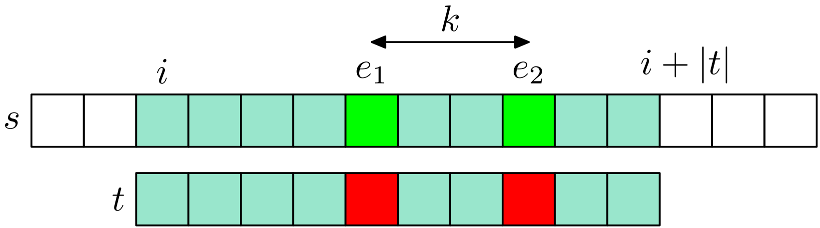
- Предполагаем, что $h(s_1) = h(s_2) \to s_1 = s_2$.
- Умея проверять две подстроки на равенство (прошлый слайд), можно искать наибольший общий префикс.
  - Двоичный поиск по длине префикса.

Решение на 100 баллов



- Мест прикладывания — $\mathcal{O}(|s|)$
  - Найти длиннейший общий префикс — $\mathcal{O}(\log |s|)$
  - Проверить $s[e_1 + 1 \dots e_2 - 1]$ — $\mathcal{O}(1)$
  - Проверить $s[e_2 + 1 \dots i + |t| - 1]$ — $\mathcal{O}(1)$
- Итого — $\mathcal{O}(|s| \log |s|)$, 100 баллов

Более быстрое решение на 100 баллов



- Так как одна из строк, с которой ищут длиннейший общий префикс — всегда t, то можно искать его при помощи z-функции от строки $t \star s$, где символ $\star$ не встречается ни в s, ни в t
- Сложность — $\mathcal{O}(|s|)$, 100 баллов

Вопросы

- Вопросы?

Спасибо за внимание!

- Спасибо за внимание!
- Вопросы?