
Разбор задачи «Новый фонтан»

Построим граф, вершинами которого будут единичные квадратики, из которых состоит основание фонтана, а ребром соединены соседние по стороне квадратики. Заметим, что высота столба воды на каждом столбике определяется тем, насколько высокий есть «барьер», который не дает воде на этом столбике стекать за край поля. Более формально, суммарная высота столбика и столба воды на нем равна минимально возможному числу x , такому что существует путь от соответствующего единичного квадрата до какого-то единичного квадрата на границе, и высоты всех столбиков на этом пути не превышают x . Все решения жюри в какой-то форме используют это утверждение.

Подзадачи 1 и 2

В первых двух подзадачах на столбиках высоты 2 точно не могло быть воды сверху, а на столбиках высоты 1 сверху был столб воды высоты 1 в том и только в том случае, если нет пути от этого столбика до края по столбикам высоты 1.

Для решения первой подзадачи можно было любым алгоритмом обхода графа, например, обходом в глубину, для каждого столбика высоты 1 проверить, существует ли такой путь. Ответом является количество столбиков, для которых такого пути нет. Обход в глубину на таком графе работает за время, пропорциональное nm , всего будет не более nm запусков. Таким образом, асимптотика времени работы решения составляет $O(n^2m^2)$.

Для решения второй подзадачи достаточно было заметить, что достаточно лишь выделить в графе компоненты связности, состоящие из столбиков высоты 1. Это можно сделать всего одним запуском алгоритма обхода графа, а ответом будет являться суммарный размер всех компонент связности, в которых есть хотя бы один квадратик, расположенный на границе. Асимптотика времени работы этого решения составляет $O(nm)$.

Подзадача 3

Для нахождения высоты столба воды на каждом столбике воспользуемся двоичным поиском. Чтобы проверить, что суммарная высота столбика и столба воды на нем не превышает x , запустим поиск в глубину, который будет посещать только столбики, высота которых не превышает x . Если поиск в глубину находит путь до края, то суммарная высота столбика и столба воды на нем не превышает x , в противном случае она строго больше x . Асимптотика времени работы этого решения составляет $O(n^2m^2 \log H)$, где H — это максимальная высота столбика.

Подзадача 4

Для решения этой подзадачи достаточно было заметить, что суммарная высота столбика и столба воды на нем всегда равна высоте какого-то из столбиков. Таким образом, можно для каждой возможной высоты столбиков найти поиском в глубину компоненты связности столбиков, высота которых не превышает этой высоты, и прибавить к ответу суммарный размер компонент, содержащих клетки границы. Асимптотика времени работы такого решения составляет $O(nmH)$.

Подзадача 5

Для решения задачи на полный балл воспользуемся алгоритмом Дейкстры. Заметим, что мы хотим для каждой клеточки найти путь от границы, максимальная высота столбика на котором минимальна. Алгоритм Дейкстры корректно работает в случае, когда весом пути является не сумма весов ребер на нем, а максимальный из этих весов. Таким образом, достаточно лишь запустить алгоритм Дейкстры одновременно из всех клеточек границы, считая весом каждого ребра максимальную из высот двух его концов. Тогда после работы алгоритма найденное расстояние до каждого столбика будет равняться суммарной высоте этого столбика и столба воды на нем. При эффективной реализации алгоритма Дейкстры (с использованием кучи, set или TreeSet), асимптотика времени работы данного решения составляет $O(nm \log nm)$.