
Разбор задачи «Деревни лесорубов»

Подвесим дерево за вершину с номером 1. Задача решается методом динамического программирования по поддеревьям. Ответ для вершины — наибольшее количество кораблей, которое может произвести поддерево этой вершины. Рассмотрим два случая.

Если вершина v не находится в подчинении ни у одного наместника, то ответ для поддерева вершины v равен $a_v + \sum_{u \in Ch_v} ans_u$, где Ch_v — множество детей вершины v , а ans_u — ответ для вершины u .

Второй случай — если в вершине v находится наместник. В таком случае, ответ для вершины v находится с помощью модифицированной задачи о рюкзаке. Изначально есть рюкзак вместимостью $|St_v| - |Ch_v|$, где St_v — множество потомков вершины v , включая саму вершину v . Вместимость рюкзака обозначает, сколько деревень могут поставлять лес. Изначально мы знаем, что любая вершина, кроме вершин из Ch_v , может поставлять лес. Также, есть $|Ch_v|$ предметов. Каждый предмет можно использовать для одного из трех действий:

- Положить в рюкзак. Вес предмета равен b_u , а стоимость — c_u . Это действие соответствует постройке мастерской в вершине $u \in Ch_v$.
- Увеличить вместимость рюкзака на 1. Это действие соответствует тому, что вершина $u \in Ch_v$ будет поставлять лес.
- Ничего не делать. Тогда предмет не кладется в рюкзак, но суммарная стоимость все равно увеличивается на a_u . Это действие соответствует тому, что вершина $u \in Ch_v$ будет строить корабли сама по себе.

Такая задача решается методом динамического программирования за $O(|St_v| \cdot |Ch_v|)$. В итоге, мы получили для каждого числа k от 0 до $(|St_v| - |Ch_v|)$ максимальное количество кораблей, которое может быть суммарно построено вершинами из Ch_v , если ровно k вершин из $St_v \setminus Ch_v$ будут поставлять лес ($St_v \setminus Ch_v$ означает множество вершин, находящихся в поддереве v , за исключением ее детей). Чтобы получить максимальное количество кораблей, которые могут суммарно построить все вершины из St_v при фиксированном k , нужно прибавить к посчитанному значению $(|St_v| - |Ch_v| - k)$ максимальных значений a_u , где $u \in St_v \setminus Ch_v$. Теперь ответ для вершины — максимум посчитанных значений по всем k .

Асимптотика времени работы равна:

$$O(\sum |St_v| \cdot |Ch_v|) = O(\sum n \cdot |Ch_v|) = O(n \cdot \sum |Ch_v|) = O(n \cdot n) = O(n^2).$$