
Кодовый замок

В первой подзадаче нужно было проверить, что все поворотные ручки достижимы из единственного центрального элемента.

Назовем интересными поворотными ручками те, из которых достигим центральный элемент и по вертикали, и по горизонтали. Если центральных элементов не больше 5 и решение существует, количество интересных поворотных ручек не может превышать 20. Поэтому, если их больше, решения точно нет. А если меньше, то можно перебрать 2^{20} вариантов ориентации этих ручек. Ориентация остальных ручек определяется однозначно. После чего нужно только проверить, является ли текущая ориентация решением.

Заметим, что у каждой ручки есть выбор из максимум двух центральных элементов, к которым она может быть в итоге присоединена. Заведем для каждой ручки булеву переменную, обозначающую к какому из двух центральных элементов она будет присоединена. Допустим, ручка будет ориентированна горизонтально. Тогда, все ручки между данной и центральным элементом, к которому она будет присоединена, тоже должны быть ориентированны горизонтально. А если любая из этих ручек ориентированна вертикально, то и данная ручка должна быть ориентированна вертикально (потому что она не может быть ориентированна горизонтально). Аналогичные условия, если ручка будет ориентированна вертикально. Несложно доказать, что эти условия являются необходимыми и достаточными. Заметим, что все эти ограничения могут быть сформулированы в формате 2-SAT. При этом, в нем будет $O(n^2)$ переменных и $O(n^3)$ кловов. Решение 2-SAT может быть найдено за линейное от количества кловов время. Таким образом, мы получили решение за $O(n^3)$ для третьей подзадачи.

Чтобы решить последнюю подзадачу, нужно оптимизировать структуру графа, который получается при решении 2-SAT. Заметим, что мы всегда проводим ребра в префикс вершин, если смотреть от какого-то центрального элемента. Поэтому, для каждого центрального элемента в каждом из четырех направлений для каждого префикса сделаем фиктивную вершину, из которой проведем два ребра: в фиктивную вершину для префикса на одну вершину короче, и в эту вершину. Теперь вместо того, чтобы проводить ребра в отрезок вершин, проведем одно ребро в фиктивную вершину, из которой будет достижим этот же отрезок. Количество вершин осталось $O(n^2)$, и количество ребер тоже стало $O(n^2)$.