

Волшебные тройки

Требуется посчитать количество троек чисел a , b и c ($1 \leq a < b < c \leq n$), таких что $a \cdot b$, $a \cdot c$ и $b \cdot c$ — квадраты натуральных чисел.

Рассмотрим разложение числа x на простые множители в виде $x = p_1^{q_1} \cdot p_2^{q_2} \cdot \dots \cdot p_k^{q_k}$. Заметим, что $a \cdot b$ является квадратом натурального числа, если в разложении числа $a \cdot b$ все q_i — четны. Значит, в разложениях a и b множества простых чисел, входящих в нечетной степени, должны совпадать.

Таким образом, найдем для каждого числа x от 1 до n множество простых, которые входят в x в нечетной степени. После этого, разобьем числа на группы с совпадающими множествами. Ответом является сумма по всем группам, количество способов выбрать три числа в группе. Количество способов выбрать три числа из m штук равно $\frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{6}$.