

Супер-счастливые билеты

Автор задачи: Орешников Даниил, разработчик: Николай Будин

В этой задаче есть два случая.

Если $\frac{n}{2}$ — четное. Тогда обозначим за a сумму цифр на нечетных позициях в первой половине числа. За b обозначим сумму цифр на четных позициях в первой половине числа. За c — на нечетных позициях во второй половине. За d — на четных позициях во второй половине. Мы знаем, что $a + b = c + d$ и $a + c = b + d$. Преобразованиями можно получить, что $b = c$ и $a = d$. Заметим, что эти равенства необходимые и достаточные для того, чтобы билетик был супер-счастливым.

Обозначим за $f(l, s)$ количество последовательностей из l цифр с суммой s . Тогда ответом является:

$$\sum_{a,b} f^2(\frac{n}{4}, a) \cdot f^2(\frac{n}{4}, b) = (\sum_a f^2(\frac{n}{4}, a))^2$$

Значит, нужно научиться вычислять значения $f(\frac{n}{4}, a)$ ($0 \leq a \leq 10 \cdot \frac{n}{4}$). Для этого можно воспользоваться быстрым преобразованием Фурье для перемножения многочленов и вычислить:

$$(1 + x + \dots + x^8 + x^9)^l$$

Тогда коэффициент при x^s будет равняться количеству способов выбрать последовательность из l цифр так, чтобы их сумма равнялась s .

Если же $\frac{n}{2}$ нечетно, то по аналогичным соображениям ответ равняется:

$$(\sum_a f^2(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor, a)) \cdot (\sum_a f^2(\lceil \frac{n}{4} \rceil, a))$$