

# Настройка коммуникаций

Автор задачи и разработчик: Даниил Орешников

Сразу стоит отметить, что эту задачу достаточно трудно решить, находя приближительные значения  $a$ ,  $b$  и  $c$  как  $\frac{xy}{z}$ ,  $\frac{xz}{y}$  и  $\frac{yz}{x}$ , а затем делая локальный поиск вокруг полученных значений (границы могут быть слишком широкие).

Давайте, не теряя общности, считать, что  $x \leq y \leq z$ , иначе их можно переставить и вернуть обратно перед выводом ответа. Выпишем неравенства, которые задаются взятием целой части:  $\sqrt{ab} \in [x, x+1)$ ,  $\sqrt{ac} \in [y, y+1)$ ,  $\sqrt{bc} \in [z, z+1)$ . Теперь, выражая  $a$  как  $\frac{\sqrt{ab}\sqrt{ac}}{\sqrt{bc}}$ , мы можем получить следующее утверждение:

$$a \in \left( \frac{xy}{z+1}, \frac{(x+1)(y+1)}{z} \right)$$

Следующее наблюдение позволяет понять, что перебор значений  $a$  занимает константное время работы:

$$\begin{aligned} \frac{(x+1)(y+1)}{z} - \frac{xy}{z+1} &= \frac{(x+1)(y+1)(z+1) - xyz}{z(z+1)} = \\ &= \frac{xy + xz + yz + x + y + z + 1}{z(z+1)} = \frac{xy}{z(z+1)} + \frac{x+y}{z} + \frac{1}{z} \leq 4 \end{aligned}$$

Давайте переберем значения  $a$  в этом интервале и проверим для каждого, существуют ли подходящие  $b$  и  $c$ . Для того, чтобы перебор значений  $b$  и  $c$  занимал меньше времени, уточним границы для них. Для заданного  $a_0$ :

- $b \in \left[ \frac{x^2}{a_0}, \frac{(x+1)^2}{a_0} \right)$
- $c \in \left[ \frac{y^2}{a_0}, \frac{(y+1)^2}{a_0} \right)$
- и при этом  $bc \in [z^2, (z+1)^2)$

Давайте представим, что мы выбрали  $b_0$  из данного интервала и хотим проверить, существует ли подходящее  $c$ . У нас есть два условия на  $c$ :

- $c \in \left[ \frac{y^2}{a_0}, \frac{(y+1)^2}{a_0} \right)$
- $c \in \left[ \frac{z^2}{b_0}, \frac{(z+1)^2}{b_0} \right)$

Необходимым и достаточным условием существования подходящего  $c$  является факт того, что эти два полуинтервала пересекаются, и их пересечение содержит хотя бы одно целое число. Давайте выпишем условие на пересечение полуинтервалов, оно заключается в неравенствах на начало одного и конец другого интервала:

- $\frac{y^2}{a_0} \leq \frac{(z+1)^2}{b_0} \implies b_0 \leq \frac{a_0(z+1)^2}{y^2}$
- $\frac{z^2}{b_0} \leq \frac{(y+1)^2}{a_0} \implies b_0 \geq \frac{a_0 z^2}{(y+1)^2}$

Получаем следующее ограничение на  $b_0$ :

$$b_0 \in \left[ \max \left( \frac{a_0 z^2}{(y+1)^2}, \frac{x^2}{a_0} \right), \min \left( \frac{a_0(z+1)^2}{y^2}, \frac{(x+1)^2}{a_0} \right) \right]$$

Перебор значений  $b_0$  в данном интервале также за константное время дает возможность восстановить подходящий  $c$ , если он существует. Константа получается достаточно большая, но  $10^5$  тестов можно пройти за секунду с лишним. Для большей уверенности можно было применить оптимизации вида «перебирать интервал не от края до края, а начиная с середины».

Следует также отметить, что с некоторого момента все вычисления надо производить в `long double` (если вы не используете Python), потому что целочисленные типы данных начинают переполняться. Это добавляет некоторые неточности в вычисления, поэтому имело смысл сдвигать границы на  $\pm 1$ , чтобы не пропустить подходящее значение из-за погрешностей.