

# Долгое путешествие

Автор задачи: Фитисов Артем, разработчик: Мария Жогова

Заметим, что масса любого симбиота ограничена  $10^9$ . Поэтому масса  $i$ -го симбиота после того, как он пожертвовал собой, может прийти до симбиота с номером  $j$ , удаленного от  $i$ -го не дальше, чем на  $R = \log_2 10^9 \leq 30$ . При этом масса  $i$ -го симбиота может как-то увеличить массу  $j$ -го, и эта обновленная масса может прийти до симбиота  $k$  на расстоянии также не больше  $R$  от  $j$ . Таким образом на вес  $k$ -го симбиота могут повлиять симбиоты, удаленные от него не дальше, чем на  $2 \cdot R$ .

Так как у каждого симбиота есть сосед слева и справа, то масса  $k$ -го симбиота может меняться в течении первых  $4 \cdot R$  лет. Далее все ближайшие симбиоты погибнут, а масса остальных симбиотов уже не будет доходить до  $k$ -го ни в каком виде.

Давайте считать, что  $4 \cdot R < n - 1$ . Для  $1 \leq t \leq 4 \cdot R$  ответ можно предпочитать, а для больших  $t$  он очевидно будет равен ответу при  $t = 4 \cdot R$ .

Давайте для каждого  $0 \leq i \leq n - 1$  пронаблюдаем то, как его масса будет влиять на  $2 \cdot R$  соседей слева и справа. Пусть  $r[i][j]$  — масса  $i$ -го симбиота при условии, что  $j$  его соседей справа поделились своей массой, а  $l[i][j]$  — масса  $i$ -го симбиота при условии, что  $j$  его соседей слева поделились своей массой. Ясно, что  $l[(i + j) \bmod n][j] = \left\lfloor \frac{l[(i + j - 1) \bmod n][j - 1]}{2} \right\rfloor + a[(i + j) \bmod n]$ , а  $r[(i + j) \bmod n][j] = \left\lfloor \frac{r[(i + j + 1) \bmod n][j - 1]}{2} \right\rfloor + a[(i + j) \bmod n]$  для всех  $1 \leq j \leq 2 \cdot R$ .

Тогда максимальная достижимая  $i$ -м симбиотом за  $t$  лет масса  $m[i][t] = \max_{0 \leq j \leq t} l[i][j] + r[i][t - j] - a[i]$ .

Ответ на задачу равен  $ans[t] = \max_{i=0}^{n-1} m[i][t]$ . Это верно для любых  $0 \leq t \leq \min(n - 1, 4R)$ . Для  $t > 4 \cdot R$  при условии  $4 \cdot R < n - 1$  ответ будет равен  $ans[4R]$ .

Если  $n - 1 \leq 4 \cdot R$ , то  $ans[t]$  для  $t < n - 1$  считается так же, как в общем случае. Рассмотрим отдельно случай, когда  $t = n - 1$ . В этом случае первый симбиот, который пожертвовал собой поделится своим весом с правым и левым соседом. Поэтому  $m[i][n - 1] = \max_{j=0}^n l[i][j] + r[i][n - j] - a[i]$ .

Следовательно,  $ans[n - 1] = \max_{i=0}^{n-1} m[i][n - 1]$ . В остальных случаях ( $t > n - 1$ )  $ans[t] = ans[n - 1]$ .

Общий план решения задачи.

1. Посчитаем  $l[i][j]$  и  $r[i][j]$  для  $0 \leq i \leq n$ ,  $0 \leq j \leq 2 \cdot R$  через рекуррентные соотношения.

2. Для всех  $t$  от 1 до  $\min(4R, n - 1)$  посчитаем ответ

$$ans[t] = \max_{0 \leq i \leq n-1} \left( \max_{\max(0, t-2R) \leq j \leq \min(t, 2R)} l[i][j] + r[i][t - j] - a[i] \right).$$

3. Если  $n - 1 < 2 \cdot R$ , то

$$ans[n - 1] = \max_{0 \leq i \leq n-1} \left( \max_{\max(0, n-2R) \leq j \leq \min(n-1, 2R)} l[i][j] + r[i][n - j] - a[i] \right).$$

4. Выведем выводить ответы на запросы. Для всех  $t_i$  либо уже посчитан, либо он равен ответу при  $t = \min(n - 1, 4R)$ , который посчитан.

Общее время работы —  $\mathcal{O}(R^2 \cdot n + m) = \mathcal{O}(n + m)$ .