

Тщательное планирование

Автор и разработчик задачи: Мария Жогова

Давайте представим разложение числа a_i на сумму разрядных слагаемых: $a_i = a_{i,9} \cdot 10^9 + a_{i,8} \cdot 10^8 + \dots + a_{i,1} \cdot 10 + a_{i,0}$, где $a_{i,j}$ — значение j -й цифры числа a_i при нумерации с нуля от разряда единиц.

Наша задача — найти такую функцию f , чтобы максимизировать сумму $S = \sum_{i=1}^n f(a_{i,9}) \cdot 10^9 + f(a_{i,8}) \cdot 10^8 + \dots + f(a_{i,1}) \cdot 10 + f(a_{i,0})$. Иными словами, мы просто переписали сумму упомянутых выше выражений по i от 1 до n , если переназначение цифр обозначить за f .

Перепишем эту сумму, сгруппировав слагаемые по степеням десятки, а не по числу из набора. Для этого давайте для каждого числа a_i найдем

$$b_{i,k} = \sum_{j=0}^9 \left(10^j \cdot \begin{cases} 1 & \text{если } a_{i,j} = k \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \right)$$

Такое выражение будет равно «вкладу» цифры k в значение i -го навыка. Ясно, что $a_i = \sum_{k=0}^9 k \cdot b_{i,k}$.

Пусть $c_k = \sum_{i=1}^n b_{i,k}$, назовем это число полным вкладом цифры k . Тогда

$$S = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=0}^9 f(a_{i,j}) \cdot 10^j \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=0}^9 f(k) \cdot b_{i,k} \right) = \sum_{k=0}^9 \left(f(k) \cdot \sum_{i=1}^n b_{i,k} \right) = \sum_{k=0}^9 f(k) \cdot c_k$$

Для того, чтобы получить максимально возможное значение S , функция f должна отображать l и m , так, чтобы $f(l) > f(m) \iff c_l \geq c_m$. Понятно, что если f назначает цифре с не-максимальным вкладом новое значение 9, то ее можно поменять с цифрой, вклад которой максимален, и сумма увеличится. Значит нужно распределить новые значения цифр так, чтобы наибольшие новые значения были даны цифрам, имеющим максимальный вклад.

Приведенное выше распределение не учитывает то, что после переназначения в записи навыков не должно быть ведущих нулей. В каком случае это может произойти? В том случае, когда в записи всех n навыков используются 10 цифр, цифра k имеет минимальный вклад и является первой в записи хотя бы одного навыка. Чтобы этого избежать, давайте отдельно рассмотрим все цифры, с которых не начинается никакой навык. Среди всех таких цифр выберем ту, которая имеет минимальный вклад, тогда функция f должна заменять ее на 0. Теперь уберем из рассмотрения выбранную цифру, а значения f для остальных цифр выберем так же, как в общем случае. Ясно, что такое распределение дает максимальную сумму S .

Все решение выглядит так:

1. Для каждой цифры посчитаем ее вклад в общую сумму, является ли она первой в записи какого-либо навыка и общее количество различных использованных цифр в записи навыков;
2. Если в записи всех навыков были использованы все 10 цифр, найдем ту, которая имеет минимальный вклад и с которой не начинается ни один навык. Так как мы ее заменим на 0, то в итоговой сумме она никак себя не проявит. Теперь будем считать, что она имеет вклад 0 в итоговую сумму, то есть $c[q] = 0$;
3. Построим массив g , где $g[k] = (k, c[k])$. Отсортируем этот массив по не возрастанию вклада в итоговую сумму, то есть по второй компоненте каждого элемента;
4. Ответ будем считать жадным образом. Так как мы заменяем i -ю цифру в порядке не возрастания вклада на цифру $10 - i$, то $ans = \sum_{k=1}^{|g|} (10 - k) \cdot g[k][0]$.

Рассмотрение цифр каждого из навыков занимает константное количество действий, а всего навыков n , значит время работы решения — $\mathcal{O}(n)$.