

# Спрятать заложницу

Автор задачи: Ильгиз Якупов, разработчик: Владислав Власов

Нам дан полный граф, в котором необходимо выделить как можно больше реберно-непересекающихся остовных деревьев.

Сначала решим задачу для четного количества вершин. Всегда можно сделать  $\frac{n}{2}$  деревьев. Больше нельзя, потому что в графе только  $\frac{n(n-1)}{2}$  ребер, а каждое остовное дерево состоит в точности из  $n - 1$  ребра. Докажем, что ровно столько выбрать можно.

Возьмем как базу граф двух вершин и единственное остовное дерево в нем, и научимся переходить от  $n - 2$  вершин к  $n$ , добавив в ответ вершины  $u$  и  $v$ .

По нашему предположению есть  $\frac{n-2}{2}$  остовов на исходных  $n-2$  вершинах (без  $u$  и  $v$ ). Разобьем эти  $n - 2$  вершины на группы  $X$  и  $Y$ , по  $\frac{n-2}{2}$  вершин в каждой. Обозначим за  $X_i$  и  $Y_i$  (пронумерованные в любом порядке)  $i$ -ю вершину в  $X$  и  $Y$  соответственно. Дополним  $i$ -й остов ребрами из  $X_i$  в  $u$  и из  $Y_i$  в  $v$ , как раз количество остовов совпадает с размерами групп  $\frac{n-2}{2}$ .

Теперь нам лишь нужно добавить одно новое дерево к нашему текущему ответу. Проведем все ребра  $Y_i \rightarrow u$  для всех  $i$ , все ребра из  $X_i$  в  $v$  для всех  $i$ , и ровно еще одно ребро  $u \rightarrow v$ . Ни одно из этих ребер мы не использовали в предыдущих остовах, так что остовы по-прежнему реберно не пересекаются.

Интересно, что таким образом мы использовали все ребра дерева из четного количества вершин. Для нечетного же случая построим деревья на  $n - 1$  вершинах как описали выше, после чего добавим еще одну вершину. При построении мы использовали все ребра, кроме тех  $n - 1$ , которые соединяют последнюю вершину с остальными. Ровно  $\frac{n-1}{2}$  из них мы проведем для дополнения всех построенных остовов, после чего у нас не останется ребер на новый.

Так как количество ребер в полном графе равно  $\frac{n(n-1)}{2}$ , и нам нужно провести и вывести практически каждое из них, асимптотика решения  $\mathcal{O}(n^2)$ .