

Гвен отдыхает

Автор задачи: Владислав Власов, разработчик: Егор Юлин

Для определенности будем считать, что на каждом шаге $n > m$ (Если это не так, то мы можем просто поменять стороны прямоугольника, от этого исход игры не изменится).

Заметим, что перед началом хода Гвен у нас может быть три случая:

1. n и m отличаются более чем на 1, т.е. их абсолютная разница превосходит 1 или $|n - m| > 1$. Тогда Гвен в своем ходу будет оптимальнее увеличить сторону m , после чего она получит n очков. Но после этого компьютеру тоже будет оптимально увеличить сторону m , после чего он так же получит n очков. Не сложно заметить, что после такого хода разница в очках между Гвен и компьютером не изменилась, но стороны прямоугольника станут равны $m + 2$ и n .
2. n и m отличаются ровно на 1 или $|n - m| = 1$. Тогда в свой ход Гвен будет оптимальнее увеличить сторону m , после чего она получит n очков. После этого $m + 1 = n$ и при любой выбранной стороне компьютер получит n очков. В таком случае разница в очках также не изменится, а стороны прямоугольника станут равны $(m + 1, n + 1)$ или $(m + 2, n)$. Не трудно заметить, что стороны прямоугольника все еще отличаются ровно на 1.
3. $n = m$. Тогда в свой ход Гвен получит n очков. А после этого для компьютера оптимальным ходом будет увеличение меньшей стороны, после чего он получит $n + 1$ очков. Разница в очках при этом увеличится на 1 в сторону компьютера, а стороны прямоугольника после этого станут равны $n + 1$ и $m + 1$.

Иными словами, всегда выгодно увеличивать меньшую сторону прямоугольника, чтобы получить количество очков, равное большей стороне. Понятно, почему в любой конкретный момент такой ход выгоднее, чем увеличение большей стороны, остается только доказать, что такой ход действительно выгоднее в долгой игре. Для этого рассмотрим любую игру и последний момент, в который кто-то из игроков решил увеличить большую из двух сторон прямоугольника.

1. После момента, когда стороны прямоугольника сравняются, игра будет идти так же.
2. А между этими моментами были ходы вида «увеличение меньшей стороны», которых у нас останется столько же, а у противника либо останется столько же, либо станет на один больше. Иными словами, если аккуратно расписать последовательность получаемых каждым игроком очков, разность между очками противника и нашими не уменьшится.

Теперь для полного решения данной задачи можно заметить, что пока разница n и m превосходит 1, на игру это никак влиять не будет, так как игроки будут получать поровну очков. Поэтому мы увеличим m до n или $n - 1$ в зависимости от четности, на это будет потрачено $\lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor$ ходов. Если ходы после этого закончились, то будет ничья. Если же у нас после этого остались ходы, то если $n - m = 1$, то снова будет ничья, а если $n = m$, то победит компьютер, при этом разница в очках будет равна количеству оставшихся ходов.