

Паутина во все стороны

Автор задачи: Даниил Орешиников, разработчик: Константин Бац

Давайте заметим, что весь «свет» (паутина), исходящий из начала координат, разбивается на сектора, и каждый из секторов либо достигает внешней окружности, либо поглощается по пути. Для того, чтобы вычислить ответ на задачу, достаточно найти сумму углов всех секторов, которые достигают внешней окружности, и поделить на 2π (360°). А секторов в принципе не так много: каждое препятствие (дыра) задает определенный сектор, который им поглощается — он расположен между касательными к этому препятствию из начала координат. Соответственно, поглощаемых секторов не более n , а значит всего секторов не более $2n$.

Осталось научиться определять эти сектора. Сначала рассмотрим простую версию: пусть по направлению нулевого угла (ось Ox) нет препятствий. Тогда воспользуемся стандартной техникой 1D-сканирующей прямой или «сортировки событий» и заведем события вида «в направлении угла α располагается касательная к препятствию». Каждое событие будет характеризоваться этим углом α и флагом $+1$, если центр препятствия имеет больший полярный угол, и -1 иначе. Теперь отсортируем эти события и обработаем в порядке возрастания угла. Получится некоторый «сканер» в виде луча из начала координат, который поворачивается против часовой стрелки.

Заметим, что когда мы встречаем событие с флагом $+1$, это означает, что после добавится новое препятствие, и наоборот — при обработке события -1 препятствий на пути луча становится на 1 меньше. Будем поддерживать количество препятствий по направлению луча s , и при встрече нового события обновлять его как $s \leftarrow s + \text{flag}$. Теперь осталось только посчитать ответ — суммарный угол всех секторов, в которых s было равно 0, то есть на пути луча не было препятствий. Для этого:

1. если после очередного события s стало равно 0, запоминаем текущий угол как начало очередного сектора **from**;
2. если после очередного события s перестает быть равно 0, добавляем к ответу текущий $\alpha - \text{from}$.

Теперь стоит упомянуть две детали. Во-первых, при сортировке векторов по углу полезно использовать векторное произведение, чтобы не вычислять углы напрямую — это поможет избежать ошибок из-за погрешности (хотя в данной задаче касательные к препятствиям уже имели нецелые координаты, так что конкретно в этой задаче в этом не было большого смысла). Во-вторых, мы решили задачу, исходя из того, что в нулевом направлении нет препятствий. Если это не так, решение не сильно изменится: либо можно отдельно посчитать исходный s как количество препятствий на пути за $\mathcal{O}(n)$, отдельно проверив каждое препятствие, либо можно считать «свободными» все сектора, в которых s достигает своего глобально минимального значения.

Время работы решения — $\mathcal{O}(n \log n)$ на сортировку событий.