

Стабилизация мультивселенной

Автор задачи и разработчик: Даниил Орешников

Эта задача — один из примеров не самых стандартных сведений ответа к решению 2-SAT. Догадаться до этого можно было по следующему факту: перед нами стоит множество выборов из двух опций, при этом из каждой пары опций ровно одна должна быть выбрана.

Для начала упростим условие: дан ориентированный граф на n вершинах, в которой из каждой вершины выходит ровно два ребра, и в каждую вершину входит ровно два ребра, то есть $\deg_{\text{in}}(v) = \deg_{\text{out}}(v) = 2$ для всех v . Требуется выбрать несколько циклов, покрывающих все вершины по одному разу, при чем чтобы интервалы чисел на выбранных ребрах имели общее непустое пересечение.

Сразу будем описывать сведение задачи к 2-SAT, то есть к решению логической формулы в 2-КНФ, в которой несколько *клезов* (скобок, состоящих из логического «ИЛИ» двух переменных или их отрицаний) перечислены через логическое «И». Для этого поймем, как описать в терминах 2-SAT условия задачи. Вместо «ИЛИ» будем использовать следствия (импликации), так как их можно взаимно выразить друг из друга, а решение задачи 2-SAT строится как раз на импликациях.

1. Заведем по переменной на каждое ребро графа. Переменная e_i будет означать, выбрано ли i -е ребро. Тогда:
 - Из каждой вершины должно выходить только одно выбранное ребро, то есть $e_{2i+1} \rightarrow \neg e_{2i+2}$ и, наоборот, $e_{2i+2} \rightarrow \neg e_{2i+1}$.
 - Аналогично, в каждую вершину должно входить ровно одно выбранное ребро, то есть если в вершину v входят ребра i и j , надо добавить условия $e_i \rightarrow \neg e_j$ и $e_j \rightarrow \neg e_i$.
2. Заведем также по переменной m_c на выражения вида «выбранная мощность m не превосходит c ». Они связываются следующей логикой:
 - Из того, что $m \leq c$, следует, что $m \leq c + 1$, поэтому надо добавить следствие $m_c \rightarrow m_{c+1}$ для всех c от 0 до 10^5 .
 - Из того, что мы выбрали ребро i , следует, что $m \in [a_i, b_i]$, то есть $\leq b_i$ и $\not\leq a_i - 1$. Добавляем следствия $e_i \rightarrow m_{b_i}$ и $e_i \rightarrow \neg m_{a_i-1}$.

Заметим, что построенная формула полностью описывает все условия из задачи. И любое решение этой формулы однозначно транслируется в корректный ответ для нашей задачи. Только надо не забывать, что когда мы добавляем следствие $a \rightarrow b$, надо также добавить и равнозначное ему $\neg b \rightarrow \neg a$.

Теперь, для решения этой формулы, применим стандартный алгоритм решения 2-SAT, основанный на выделении компонент сильной связности. Если мы получили противоречие, то решения нет, а иначе — выбираем те e_i , которые истинны, и получаем список выбранных ребер, а также выбираем максимальное c , при котором m_c истинно, и получаем значение m . Суммарное время работы алгоритма равно $\mathcal{O}(n + m_{\max})$.