

# Загадка Прайма

Автор задачи и разработчик: Герман Андосов

Заметим, что если  $n \equiv 2 \pmod 3$ , то мы можем узнать  $(n - 1)$ -е число последовательности и умножить его на 2. Аналогично, если  $n \equiv 0 \pmod 3$ , то мы можем узнать  $(n - 2)$ -е число последовательности и умножить его на 3. Поэтому, давайте сделаем  $n = \lceil \frac{n}{3} \rceil$  и будем далее рассматривать последовательность  $1, 4, 5, 6, 7, 9, \dots$

Утверждается, что все числа в последовательности имеют вид  $2^x \cdot 3^y \cdot p$ , где  $p$  — натуральное число, не делящееся на 2 и на 3, а  $(x + y)$  — чётно. Это легко доказать по индукции.

Теперь заметим, что наша последовательность монотонна (в нашем случае строго возрастает), поэтому мы можем применить бинарный поиск. Для числа  $mid$  мы должны узнать, сколько чисел в последовательности стоят до него. Переберем значения  $x$  и  $y$ , и убедимся в том, что  $(x + y)$  чётно. Теперь ответим на вопрос — сколько чисел вида  $2^x \cdot 3^y \cdot a$  меньше или равны  $x$ ? Оказывается, их

$$T(x, y) = \left\lfloor \frac{mid}{2^x \cdot 3^y} \right\rfloor.$$

Теперь нам нужно из этого количества вычесть все числа, у которых  $a$  делится на 2 или на 3. Делается это по формуле включений-исключений:

$$T(x, y) \leftarrow T(x, y) - \left( \left\lfloor \frac{T(x, y)}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{T(x, y)}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{T(x, y)}{6} \right\rfloor \right).$$

.

Просуммировав значения  $T(x, y)$  для всех чисел  $(x, y)$ , мы получим искомую величину  $cnt$  (сколько чисел в последовательности стоят до числа  $mid$ ). Если  $cnt < n$ , то сдвинем левую границу бинарного поиска, иначе правую. Когда бинарный поиск отработает, его правая граница и будет ответом на задачу. Не забываем, что иногда ответ надо будет домножить на 2 или на 3.